II.C Théorème d'Hadamard-Lévy (204) (214) (215) (220)

Théorème 35: Hadamard-Lévy

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)^a$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est inversible, et $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Démonstration. On ne démontre que le sens difficile (à savoir $2 \implies 1$). Une idée pour démontrer cette implication est d'utiliser le théorème d'inversion globale. Pour cela on a besoin de l'injectivité de f. On va donc montrer que f jouit de cette propriété en utilisant un inverse à droite de cette fonction. On cherchera une condition suffisante sur cette inverse pour avoir l'injectivité de f et on démontrera ensuite que l'inverse possède cette propriété.

Construction d'un inverse à droite

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ soit inversible, et $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Quitte à remplacer f par $f - f(0)$ OPS $f(0) = 0$.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et 1. Si $s : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dérivable selon la première variable et est telle que :

$$\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, f \circ s(t,x) = tx \tag{1}$$

Alors $s(1, \cdot)$ sera inverse à droite de f.

Si $s : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dérivable selon la première variable, alors par théorème de Cauchy, l'application s vérifie (1) si et seulement si, pour tout $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$ (où on voir x comme étant un paramètre fixé et t la variable pour appliquer le théorème de Cauchy qui donne existence et unicité d'une solution maximale),

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(f \circ s)(t,x) = \mathrm{d}f(s(t,x)) \circ \partial_t s(t,x) = x \\ f \circ s(0,x) = 0 \end{cases}$$

soit si et seulement si, pour tout $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \partial_t s(t,x) = (\mathrm{d}f(s(t,x)))^{-1} \cdot x \\ s(0,x) \in f^{-1}(\{0\}) \end{cases}$$

On prend alors un élément dans l'image réciproque de $\{0\}$ par f, par l'hypothèse que l'on a fait au début, on peut choisir 0. On obtient ainsi :
si pour tout $x \in \mathbb{R}^n, s(\cdot, x)$ est solution sur l'intervalle I du problème de Cauchy autonome :

$$\begin{cases} y\prime & = & F(x,y) \\ y(0) & = & 0 \end{cases} \tag{2}$$

alors s vérifie (1) ; où l'on a noté

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,y) & \longmapsto \mathrm{d}f(y)^{-1} \cdot x \end{cases}$$

L'application F est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
En particulier, elle est $\mathcal{C}^0$ et localement lipschitzienne en y. Donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale $(s(\cdot,x),]T^-, T^+[)$ de (2), notée $s(\cdot, x)$, définie sur un intervalle ouvert $]T^-(x), T^+(x)[$ contenant 0 (à l'oral, on notera T^+ et T^- sans dépendance en x pour alléger l'écriture, mais on l'évoquera à l'oral).

On a :

$$x \in \mathbb{R} \qquad T^+(x) > 1.$$

car si $T^+(x) \leqslant 1$, alors d'après le critère d'explosion en temps fini (ou théorème de sortie de tout compact), on a : $\lim\limits_{t \to T^+(x)} \|s(t,x)\| = +\infty$ et donc comme f est coercitive, on obtient $\lim\limits_{t \to T^+(x_0)} \|f \circ s(t,x)\| = +\infty$. Or $\|f \circ s(t,x)\| = \|tx\| \underset{t \to T^+(x)}{\longrightarrow} T^+(x)\|x\| < \infty$. C'est donc absurde.

On peut donc définir l'application $s_1 = s(1,\cdot)$ et ainsi s_1 est un inverse à droite de f : $f \circ s_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Injectivité de f.

Soient y_1 et y_2 des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(y_1) = f(y_2)$. **Supposons que s_1 soit surjective**, alors on dispose de x_1, x_2 tels que $y_1 = s_1(x_1)$ et $y_2 = s_1(x_2)$:

$$y_1 = s_1(x_1) \text{ et } y_2 = s_1(x_2)$$

Comme s_1 est un inverse à droite de f, on a :

$$x_1 = f \circ s_1(x_1) = f(y_1) = f(y_2) = f \circ s_1(x_2) = x_2$$

Donc $y_1 = s_1(x_1) = s_1(x_2) = y_2$. Donc f est injective.

Il faut donc montrer que s_1 est surjective.

Surjectivité de s_1.

On démontre cette assertion par un argument de connexité : on va montrer que $s_1(\mathbb{R}^n)$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$ qui est connexe, c'est-à-dire que $s_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

$s_1(\mathbb{R}^n)$ est fermé Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(s_1(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Alors comme f est continue, on obtient $\lim\limits_{k \to +\infty} \underbrace{f \circ s_1(x_k)}_{=x_k} = f(y)$. **Si on suppose de plus s_1 continue** alors on a $s_1(x_k) = s_1(f(y))$. Donc $s_1(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

$s_1(\mathbb{R}^n)$ est ouvert (voisinage de chacun de ses points) Soient $y \in s_1(\mathbb{R}^n)$. Il s'écrit $y = s_1(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\mathrm{d}f(y)$ est inversible, par le théorème d'inversion locale on dispose d'un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $x = f(s_1(y))$, et d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de y tels que f induise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ϕ de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{U}$. **Si on suppose s_1 continue** alors on dispose d'un voisinage ouvert $\mathcal{U}'$ de x inclus dans $\mathcal{U}$ tel que $s_1(\mathcal{U}') \subset \mathcal{V}$. Alors

$$s_1(\mathcal{U}') = \phi^{-1}\left(\phi\left(s_1(\mathcal{U}')\right)\right) = \phi^{-1}\left(f\left(s_1(\mathcal{U}')\right)\right) = \phi^{-1}(\mathcal{U}').$$

Donc est ouvert comme image réciproque de $\mathcal{U}'$ par ϕ qui est continue. Finalement $y \in s_1(\mathcal{U}') \subset s_1(\mathbb{R}^n)$ qui contient y. Donc $s_1(\mathbb{R}^n)$ est un voisinage de y. Finalement $s_1(\mathbb{R}^n)$ est ouvert, car voisinage de chacun de ses points.

Donc, par connexité de $\mathbb{R}^n$, $s_1(\mathbb{R}^n)$ étant ouvert, fermé et non vide, on a :

$$s_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$$

Il reste donc maintenant à démontrer la continuité de s_1.

Continuité de s_1

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on dispose de r tel que $x_0 \in \overline{\mathrm{B}(0, r-1)}$.

Comme f est coercitive $f^{-1}\left(\overline{\mathrm{B}(0,r)}\right) \subset \overline{\mathrm{B}(0,R)}$ pour un certain R

On a $\|f \circ s(t,x)\| = \|tx\| \leqslant r$, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \overline{\mathrm{B}(0,r)}$. C'est-à-dire que l'on a :

$$s([0,1] \times \overline{\mathrm{B}(0,r)}) \subset f^{-1}(\overline{\mathrm{B}(0,r)}) \subset \overline{\mathrm{B}(0,R)}$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\mathrm{B}(0,R)}^2$ qui est à la fois convexe et compact, elle y est K-lipschitzienne (IAF) avec $K := \max\limits_{(x,y)\in\overline{\mathrm{B}(0,R)}^2} \| \,\mathrm{d}F(x,y)\|_{\mathcal{L}}$.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_1 - x_0\| \leqslant 1$. Par inégalité triangulaire on a $x_1 \in \overline{\mathrm{B}(0,r)}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\|s\,(t,x_1) - s\,(t,x_0)\| &= \left\| \int_0^t \partial_t s\,(u,x_1) - \partial_t s\,(u,x_0)\,\mathrm{d}u \right\| \\
&\leqslant \int_0^t \|F\,(x_1, s\,(u,x_1)) - F\,(x_0, s\,(u,x_0))\|\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant K\,\|x_1 - x_0\| + \int_0^t K\,\|s\,(u,x_1) - s\,(u,x_0)\|\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le lemme de Grönwall, on a :

$$\|s\,(t,x_1) - s\,(t,x_0)\| \leqslant K\,\|x_1 - x_0\|\,e^{Kt}$$

En particulier en $t = 1$, on obtient que pour tout $x \in \overline{\mathrm{B}(x_0,1)}$, on a :

$$\|s_1(x) - s_1\,(x_0)\| \leqslant Ke^K\,\|x - x_0\|$$

Comme x_0 est quelconque, s_1 est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$, donc en particulier continue.

Conclusion

L'application f est injective, de classe $\mathcal{C}^2$, et sa différentielle est partout inversible. Donc d'après le théorème d'inversion globale f réalise un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f\,(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Ceci conclut de prouver l'implication $2 \implies 1$.

$\blacksquare$